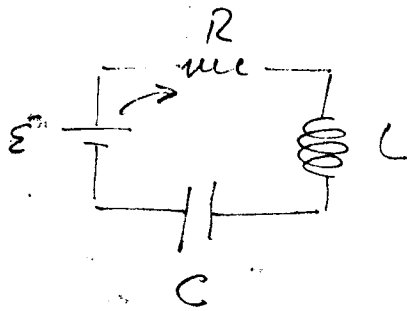


Circuito RLC com bateria

22



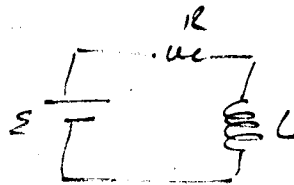
Força eletromotriz no circuito

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri + \frac{q}{C} \quad \text{ou}$$

$$E - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

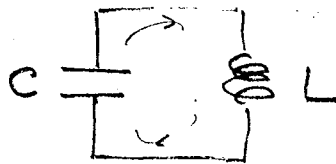
(a) Sem bateria ; $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$
RLC

(b) Sem capacitor
RL



$$E - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

(c) Sem resistência
e sem bateria
LC



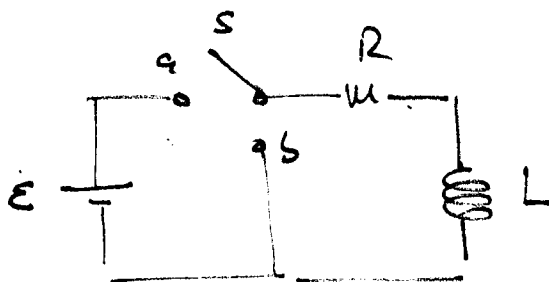
$$-L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

(*) Nota: (b) Em $t=0 \quad i=0 \quad E = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} \Rightarrow \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{E}{L}$

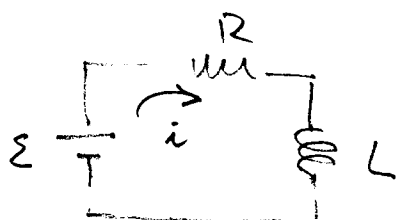
Circuitos envolvendo indutores.

$$\Delta V = V_p - V_f = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (22)$$

(b) Circuito RL



Chave S em (a) $\Rightarrow$



$$\mathcal{E} - Ri - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1)$$

circuito aberto em $t=0$

Condições de contorno em $t=0$ $i=0 \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}$
 Para $t \rightarrow \infty$ $\frac{di}{dt} \rightarrow 0$ (corrente estacionária)

$$\Rightarrow i_{\max} = i(t \rightarrow \infty) = \mathcal{E}/R$$

$$i \uparrow \mathcal{E}/R$$

Chame $y(t) = \frac{di}{dt}$
 L funciona como um curto-circuito $L \frac{di}{dt} \rightarrow 0!$

Derivando a Eq. (1) em relação ao tempo obtenemos:

$$-R \frac{di}{dt} - L \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow L \frac{dy}{dt} = -Ry \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{R}{L} dt$$

Vamos chamar $\tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{\tau_L}$. Integrando dos dois lados

Note que τ_L tem dimensão de tempo (tempo característico)

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L} \Rightarrow y = y_0 e^{-t/\tau_L} \text{ onde } y_0 = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau_L} \text{ ou seja } \left| \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau_L} \right|$$

$$y = \frac{di}{dt} \Rightarrow di = y dt \Rightarrow i(t) - \underbrace{i(0)}_{=0} = \int_0^t y(t') dt' \quad (23)$$

$$i(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon}{L} e^{-t'/\tau_L} dt' = \frac{\varepsilon}{L} \left. \frac{e^{-t'/\tau_L}}{(-)\frac{1}{\tau_L}} \right|_0^t = -\frac{\varepsilon}{L} \tau_L e^{-t'/\tau_L} \Big|_0^t$$

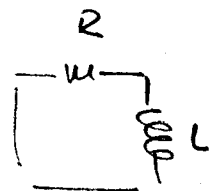
$$i(t) = -\frac{\varepsilon}{L} \frac{L}{R} e^{-t'/\tau_L} \Big|_0^t = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

Decorridos $t = \tau_L$ $i(t = \tau_L) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) \approx \frac{\varepsilon}{R} (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{R}$

a corrente atinge $\frac{2}{3}$ do valor máximo.

Se a chave é ligada em (b) obtemos



$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{di}{i} = - \frac{dt}{\tau_L} \Rightarrow \ln\left(\frac{i}{i_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L}$$

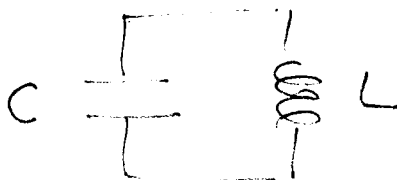
agora $i_0 = i(t=0)$ instante em que a chave é conectada em (b). $\Rightarrow \boxed{i = i_0 e^{-t/\tau_L}}$

$$i(\tau_L) = \frac{i_0}{e} \approx \frac{1}{3} i_0 \text{ Decorridos um tempo } t = \tau_L \text{ depois que}$$

a chave foi conectada em b a corrente cai a $\frac{1}{3}$ do seu valor inicial.

(c) Circuito LC

24



$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad ; \text{ chamando } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad q = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

As constantes A e φ são determinadas pelas condições iniciais. Ex: em $t=0$ $q = q_0$ $i = 0$

$$i = \frac{dq}{dt} = -A\omega \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad i(0) = -A\omega \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$q = A \cos(\omega_0 t) \quad q(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0$$

$$\text{Nesse caso } q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t)$$

Carga, corrente, d.d.p. em terminais do capacitor e a f.e.m. induzida t.b. oscilam com período $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ou frequência $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Sem resistência a energia total é constante:

$$\frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \text{Energia total inicial} = \frac{q_0^2}{2C}$$

(a) $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$ $i = \frac{dq}{dt}$ (RLC sem bateria)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

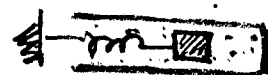
chamando $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow$

$$\left[\frac{d^2q}{dt^2} + \lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \right]$$

* Análogo mecânico

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

termo responsável pelo amortecimento



Soluções do tipo: $e^{zt} \Rightarrow$ eq. característica.

$$(z^2 + \lambda z + \omega_0^2) e^{zt} = 0 \Rightarrow z^2 + \lambda z + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$z = \frac{-\lambda}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad \text{chamando } \frac{\lambda}{2} = \omega_1 \quad \text{(*) Das: } \omega_1 > 0$$

$$z = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} = -\omega_1 \pm \omega_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\omega_1 + \omega_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right]^{1/2} \\ z_2 = -\omega_1 - \omega_1 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

Solução geral: $q(t) = A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t}$

A_1 e A_2 são duas constantes que são determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo $q(t=0) = q_0$ e $i(t=0) = i_0$.

(*) Há três regimes distintos, dependendo do valor

do discriminante $1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Amortecimento forte } \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 < 1 \Leftrightarrow \omega_1 > \omega_0 \\ \text{Amortecimento fraco } \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 > 1 \Leftrightarrow \omega_1 < \omega_0 \\ \text{Amortecimento crítico } \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \omega_1 = \frac{\lambda}{2} = \frac{R}{2L} \end{array}$$

$$q(t) = \left\{ A_1 e^{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} t} \right\} e^{-\omega_1 t}$$

$\omega = \frac{R}{2L} > 0$; $e^{-\omega_1 t}$ representa uma exponencial decrescente com o tempo, refletindo o amortecimento provocado pela dissipação no resistor.

a.1 - Amortecimento forte : $\omega_1^2 > \omega_0^2$. Nesse caso

$e^{-\omega_1 t \pm (\omega_1^2 - \omega_0^2)^{1/2} t}$ são exponenciais decrescentes em o tempo.

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^{1/2} = \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \right)^{1/2} ; \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \right)^{1/2} < 1 \Rightarrow$$

$$e^{-\omega_1 t \pm (\omega_1^2 - \omega_0^2)^{1/2} t} = e^{-\omega_1 t \left[1 \pm \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \right)^{1/2} \right]}$$

isto é sempre $< 1 \Rightarrow$ A exp. é sempre decrescente.

Tanto $A_1 e^{-\omega_1 t} e^{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} t}$ quanto $A_2 e^{-\omega_1 t} e^{-\sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} t}$ caem com o tempo.

a.2 - No caso de amortecimento relativamente fraco $\omega_1^2 < \omega_0^2$

$$\text{Nesse caso } \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2} = \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \omega_1^2)} = i \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

$\underbrace{\omega_0^2 - \omega_1^2}_{> 0}$ $\underbrace{\omega_0^2 - \omega_1^2}_{> 0}$

$$z_1 = -\omega_1 + i\alpha \quad ; \quad z_2 = -\omega_1 - i\alpha$$

$$\text{com } \alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \text{ real e } > 0$$

$$q_1(t) = e^{z_1 t} = e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i\alpha t} = e^{-\frac{R}{2L}t} (\cos \alpha t + i \sin \alpha t) \text{ é solução}$$

$$q_2(t) = e^{z_2 t} = e^{-\frac{R}{2L}t} e^{-i\alpha t} = e^{-\frac{R}{2L}t} (\cos \alpha t - i \sin \alpha t) \text{ t.b. é solução}$$

$$q_1 + q_2 = e^{-\frac{R}{2L}t} 2 \cos \alpha t \quad \text{e} \quad q_1 - q_2 = e^{-\frac{R}{2L}t} 2i \sin \alpha t$$

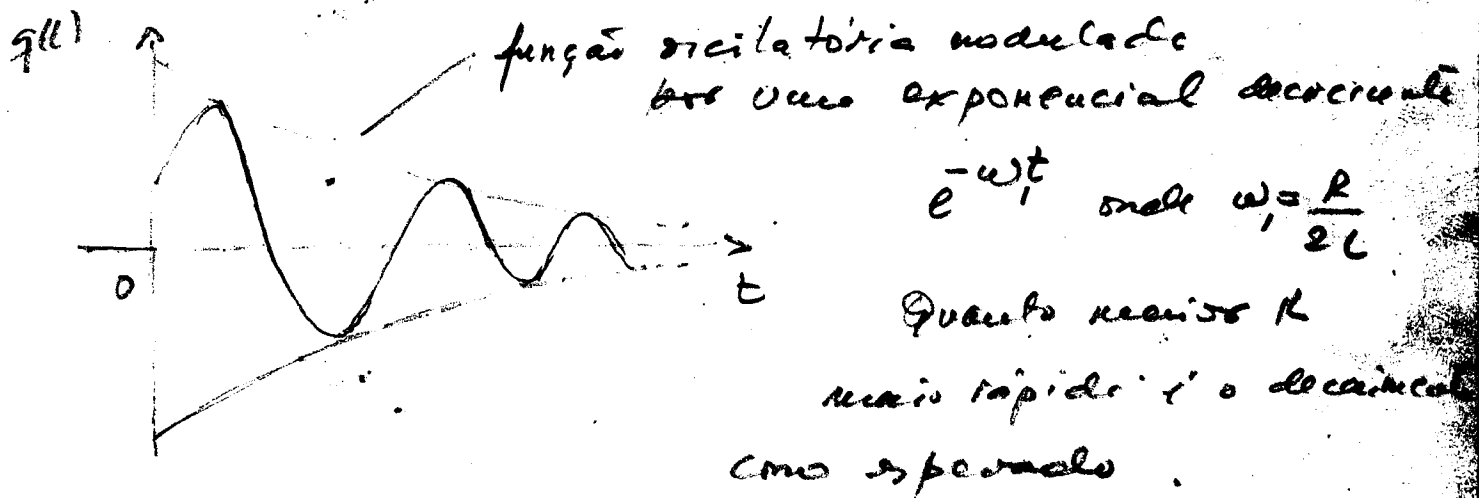
também são soluções. Na verdade,

$$A_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \alpha t + A_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \alpha t \text{ é sol. } \forall A_1, A_2$$

Em outras palavras a sol. geral

$$q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A_1 \cos \alpha t + A_2 \sin \alpha t) = e^{-\frac{R}{2L}t} A \cos(\alpha t + \varphi)$$

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \quad \alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$



A_1 e A_2 ou A e φ são duas constantes que devem ser determinadas pela condição de contorno do problema.

Caso (a) com bateria $\mathcal{E} = \underline{ct}$.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Para $\mathcal{E}$ independente de t (fonte de tensão cte) podemos derivar a eq. acima em relação ao tempo e obter

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$\lambda = R/L ; \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \left| \frac{d^2 i}{dt^2} + \lambda \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \right|$$

Na eq. para a carga $q(t)$ no caso (a) sem bateria.

Finalmente, no caso de amortecimento crítico

$$\omega_1 = \omega_0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = -\omega_1$$

Nesse caso $q_1(t) = A e^{-\omega_1 t}$ é solução. Porém,

$q_2 = t e^{-\omega_1 t}$ t.b. é solução. Vejamos:

$$\frac{dq_1}{dt} = (-\omega_1) t e^{-\omega_1 t} + e^{-\omega_1 t} \quad \frac{d^2 q_2}{dt^2} = \omega_1^2 t e^{-\omega_1 t} + (-\omega_1) e^{-\omega_1 t} + (-\omega_1) e^{-\omega_1 t}$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \lambda \frac{dq_2}{dt} + \omega_0^2 q_2 = \omega_1^2 t e^{-\omega_1 t} - 2\omega_1 e^{-\omega_1 t} + \lambda (-\omega_1) t e^{-\omega_1 t} + \lambda e^{-\omega_1 t} + \omega_0^2 t e^{-\omega_1 t} = (\omega_1^2 - \lambda \omega_1 + \omega_0^2) t e^{-\omega_1 t} + (-2\omega_1 + \lambda) e^{-\omega_1 t} = 0$$

De fato, $\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 - \lambda \omega_1 + \omega_0^2 = \frac{\lambda^2}{4} - \lambda \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} = 0 \\ -2\omega_1 + \lambda = -2\frac{\lambda}{2} + \lambda = 0 \end{array} \right.$

Ou seja, a solução geral é da forma

$$q(t) = A_1 e^{-\omega_1 t} + A_2 t e^{-\omega_1 t} \quad \left| \quad \omega_1 = \omega_0 \right.$$

amortecimento crítico.

Resumo: Dois raios reais distintos $\omega_1 > \omega_0$

Amortecimento forte $q(t) = e^{-\omega_1 t} [A_1 e^{\alpha' t} + A_2 e^{-\alpha' t}]$
 $\omega_1 = \lambda/2$; $\alpha' = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_0^2}$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
 $\lambda = R/L$

Amortecimento fraco: duas raízes complexas $\omega_1 < \omega_0$

$$q(t) = e^{-\omega_1 t} [A_1 \cos \alpha t + A_2 \sin \alpha t]$$

$$= e^{-\omega_1 t} A \cos(\alpha t + \varphi)$$

$$\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} \quad \omega_1 = \lambda/2 \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Amortecimento crítico: uma raiz apenas $\omega_1 = \omega_0$

$$q(t) = e^{-\omega_1 t} [A_1 + A_2 t]$$

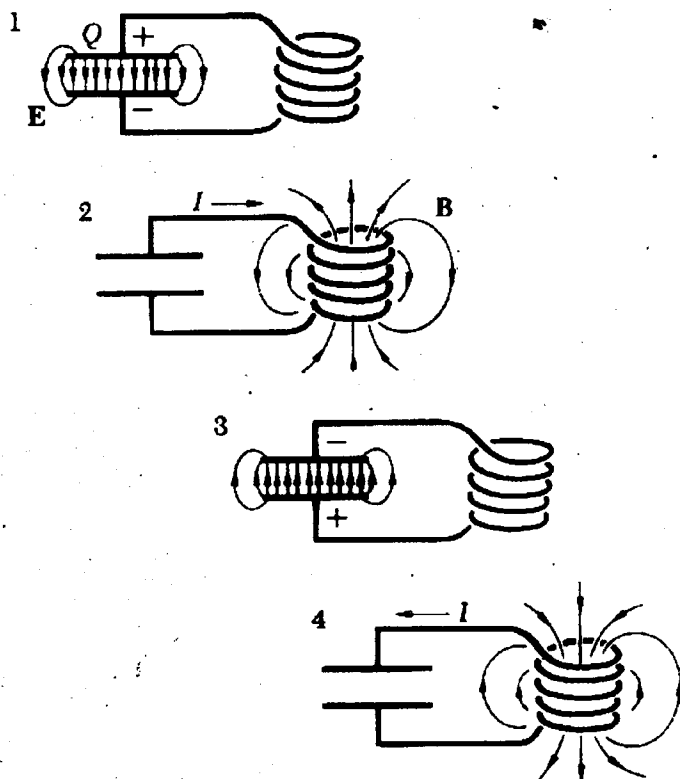
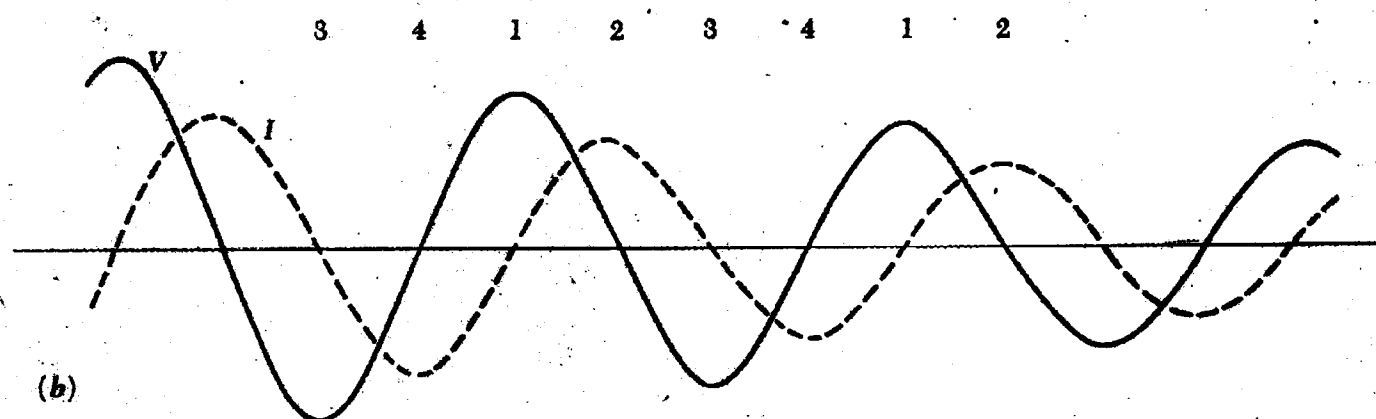
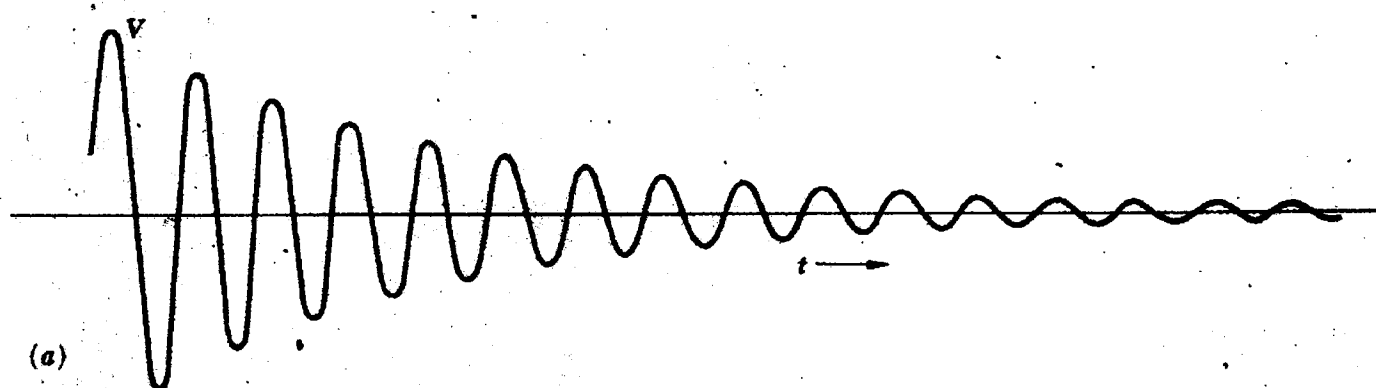


Fig. 8.2 (a) A oscilação senoidal amortecida da tensão no circuito RLC.

(b) Uma porção de (a) com a escala do tempo ampliada e com a inclusão do gráfico da corrente I .

(c) A transferência periódica de energia do campo elétrico para o campo magnético e vice-versa. Cada desenho representa a situação no instante indicado pelo número correspondente em (b).

